

УДК 539.3

*Новоселов О.Г., старший преподаватель, Набережночелнинский институт  
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».*

*Сибгатуллин К.Э., кандидат технических наук, доцент,  
Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)  
федеральный университет».*

*Сибгатуллин Э.С., доктор физико-математических наук, профессор,  
Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)  
федеральный университет».*

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНТРОРСА ПО ПРОЧНОСТИ

*Аннотация: Рассмотрен контрфорс с размерами 1.0x1.0x3.0 м.,  
находящийся в объемном напряженно-деформированном состоянии (НДС).  
Материалом контрфорса является бетон класса В25 с нормативным  
сопротивлением на сжатие  $R_{сж}=14.5$  МПа и нормативным сопротивлением  
на растяжение  $R_{раст}=1.05$  МПа. Целью работы является сравнение  
результатов решения задачи по предлагаемый в работе методике и с  
использованием программного продукта ПК Лири 10.11.*

*Ключевые слова: бетон, контрфорс, не упругость, объемное напряженно-  
деформируемое состояние, упругость*

Предельная поверхность для бетона в пространстве напряжений  
описывается уравнением

$$\Phi \equiv a(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2c(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + d(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 1. \quad (1)$$

Здесь

$$a = \frac{1}{R_{сж}R_{раст}}, \quad 2c = \frac{R_{сж}-R_{раст}}{R_{сж}R_{раст}}, \quad d = \frac{1}{4R_{раст}^2}. \quad (2)$$

С использованием ассоциированного закона текучести и  
соответствующих кинематических гипотез переходим в пространство  
внутренних сил и моментов. Получаем систему из 15 параметрических  
уравнений, описывающих предельную поверхность в этом пространстве [1]:

$$T_{11} = \frac{1}{2\Delta} [I_{11}\delta_{11}\dot{e}_1 + I_{31}\delta_{11}\dot{a}_{21} - I_{41}\delta_{11}\dot{a}_{31} - 2\Delta_1 A] ; \dots; \quad (3)$$

$$M_{33} = \frac{1}{2\Delta} [I_{23}\delta_{55}\dot{e}_5 - I_{33}\delta_{66}\dot{e}_6 + 0.5I_{66}\delta_{55}(\ddot{a}_{33} - \ddot{a}_{22}) - 0.5I_{33}\delta_{66}(\ddot{a}_{11} - \ddot{a}_{33})].$$

Многочисленные опыты показывают, что некоторые тела разрушаются квазихрупко, а именно по определенным тонким поверхностям (обобщенные поверхности разрушения - ОПР), области между которыми не разрушаются и не претерпевают заметных пластических деформаций (абсолютно жесткие конечные элементы - АЖКЭ). При проведении расчетов на прочность с использованием ЭВМ необходимо предварительная дискретизация тел.

Пусть тело нагружено внешними поверхностными  $p_i$  и объемными  $\gamma_j$  силами:

$$p_i = \mu p_i^0 + p_i^1, \quad \gamma_j = \mu \gamma_j^0 + \gamma_j^1. \quad (4)$$

Здесь  $p_i^0, p_i^1, \gamma_j^0, \gamma_j^1$  являются функциями только пространственных координат,  $\mu$  – монотонно возрастающий параметр. Необходимо определить предельное значение  $\mu_0$  параметра внешнего нагружения, когда рассматриваемый массивный элемент теряет свойство геометрической неизменяемости. В рассматриваемом случае, когда разрушение массивного тела происходит по отдельным «бесконечно» тонким ОПР между соседними АЖКЭ, основное энергетическое уравнение [2] можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^m \int_{S_k} N dS = \mu \left( \int_{S_0} p_i^0 v_i dS + \int_{V_0} \gamma_j^0 v_j dV \right) + \int_{S_1} p_i^1 v_i dS + \int_{V_1} \gamma_j^1 v_j dV. \quad (5)$$

Для краткости записи знаки  $\sum$  в правой части (5) опущены.

На рис. 1 изображены два соседних АЖКЭ  $P_1B_1...B_n$  и  $P_2B_1...B_n$ , контактирующие между собой через ОПР  $B_1B_2...B_n$ . Согласно теореме Шаля [3], движение каждого из АЖКЭ в трехмерном пространстве можно рассматривать как составленный из поступательного движения вместе с его полюсом и движения около полюса как неподвижного.

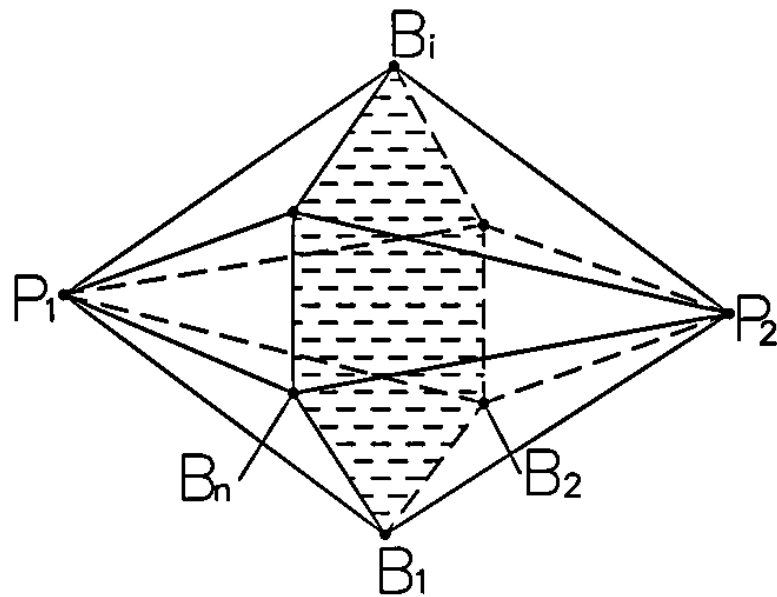


Рис. 1. Соседние АЖКЭ  $P_1B_1...B_n$  и  $P_2B_1...B_n$

Скорость диссипации внутренней энергии в произвольной точке  $B_i$  ОПР (рис. 1) определяется формулой

$$N(B_i) = \vec{R}_*(B_i) \cdot \Delta \vec{v}(P_1P_2) + \vec{M}_*(B_i) \cdot \Delta \vec{\omega}(P_1P_2). \quad (6)$$

Здесь  $\vec{R}_*$ ,  $\vec{M}_*$  - главный вектор и главный момент внутренних распределенных сил, отнесенных к единице площади; они являются функциями координат рассматриваемой точки  $B_i$ ;

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}(P_1P_2) &= \vec{v}(P_2) + \vec{\omega}(P_2) \times \overrightarrow{P_2B_1} - \vec{v}(P_1) - \vec{\omega}(P_1) \times \overrightarrow{P_1B_1}; \\ \Delta \vec{\omega}(P_1P_2) &= \vec{\omega}(P_2) - \vec{\omega}(P_1); \end{aligned} \quad (7)$$

$\vec{v}(P_1)$ ,  $\vec{v}(P_2)$  - скорости движения полюсов  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1), соответственно;  $\vec{\omega}(P_1)$ ,  $\vec{\omega}(P_2)$  - мгновенные угловые скорости вращения соответствующих АЖКЭ около полюсов  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно.

Равенство (6) имеет место, когда обобщение силы и скорости обобщённых перемещений связаны ассоциированным законом деформирования [2]

$$\Delta \vec{v} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{R}_*}, \quad \Delta \vec{\omega} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{M}_*}. \quad (8)$$

Здесь  $\Phi(\vec{R}, \vec{M}) = 0$  - уравнение предельной поверхности в пространстве обобщенных сил.

В соответствии с постулатом Друккера [2] имеем (рис. 1):

$$N(B_i) \geq \vec{R} \cdot \Delta \vec{v}(P_1 P_2) + \vec{M} \cdot \Delta \vec{\omega}(P_1 P_2). \quad (9)$$

Здесь  $\vec{R}, \vec{M}$  – любая комбинация обобщённых сил, удовлетворяющая уравнению предельной поверхности  $\Phi(\vec{R}, \vec{M}) = 0$ . Рассматриваем объемный элемент тела, имеющий единичные размеры, отнесенный к неподвижной системе координат хуз. Внутренние силы, действующие на грани этого элемента, приводятся в центры соответствующих граней. В итоге получаем главный вектор и главный момент этих сил:

$$\vec{R} = \{T_{11}, \dots, T_{33}\}^T; \vec{M} = \{M_{11}, \dots, M_{33}\}^T. \quad (10)$$

Представим задачу в виде задачи линейного программирования (ЛП), которая решается с использованием симплекс-метода. Для этого вместо (6) необходимо использовать систему ограничений вида (9), где различные комбинации  $\vec{R}$  и  $\vec{M}$  соответствуют вершинам выпуклого предельного многогранника, аппроксимирующего предельную поверхность  $\Phi(\vec{R}, \vec{M}) = 0$ . Внешние силы, приложенные в пределах отдельных АЖКЭ, можно привести к полюсам соответствующих АЖКЭ. Задача линейного программирования: Найти  $\min \mu^+$ , где

$$\mu^+ = \sum_{k=1}^m \frac{S_k}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N_i(B_i) - \sum_{j=1}^{n_2} (\vec{F}_j^1 \vec{v}_j + \vec{M}_j^1 \vec{\omega}_j), \quad (11)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n_1} (\vec{F}_j^0 \vec{v}_j + \vec{M}_j^0 \vec{\omega}_j) = 1, \quad (12)$$

$$\{N_i(B_i) \geq [\vec{R} \cdot \Delta \vec{v}(P_1 P_2) + \vec{M} \cdot \Delta \vec{\omega}(P_1 P_2)]\}_j. \quad (13)$$

Число ограничений вида (13) равно произведению числа всех точек  $B_i$  на число вершин предельного многоугольника. Соотношения (11), (12), (13) переписаны нами в проекциях на оси неподвижной системы координат хуз.  $N_i \geq 0$  являются несвободными переменными задачи ЛП,  $v_j \geq 0$ ,  $\omega_j \geq 0$  – свободными переменными. Составлена соответствующая программа для ЭВМ в среде Matlab.

На контрфорс принята следующая комбинация нагрузок (рисунок 2), а именно: горизонтальное давление грунта ( $P_\gamma$ ); равномерно распределенная нагрузка на грунт ( $q$ ); собственный вес конструкции контрфорса ( $G_k$ ). Нагрузка  $q$  зависит от параметра  $\mu^+$ , а нагрузки  $P_\gamma$  и  $G_k$  - не зависят.

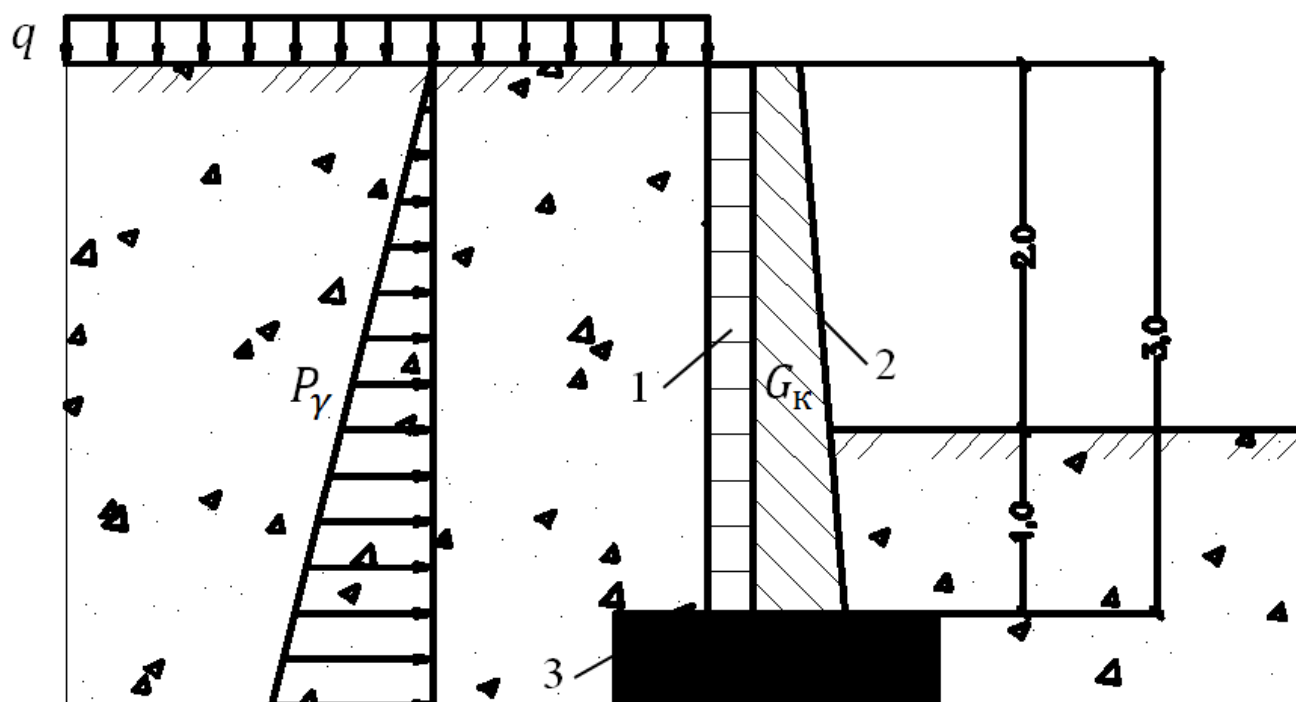


Рис.2. Расчетная схема: 1 – подпорная стенка; 2 – контрфорс; 3 – фундамент.

Ниже приведены некоторые результаты, полученные нами с использованием предлагаемой методики.

На рис. 3 представлены 4 варианта разбиения на АЖКЭ. Каждый контрфорс разбит на АЖКЭ в форме прямоугольных параллелепипедов с разными размерами. Действительный механизм разрушения соответствует минимальному значению параметра  $\mu^+$  из (11). Из 4 вариантов дискретизации, приведенных на рис.3 схеме 3г соответствует наименьшее значение из всех  $\mu^+$ . На рис. 4а показана соответствующая схема разрушения контрфорса, на рис. 4б -распределение скоростей диссипации энергии по соответствующей ОПР. Во всех схемах на рис. 3 АЖКЭ №1 считаем неподвижно закрепленным.

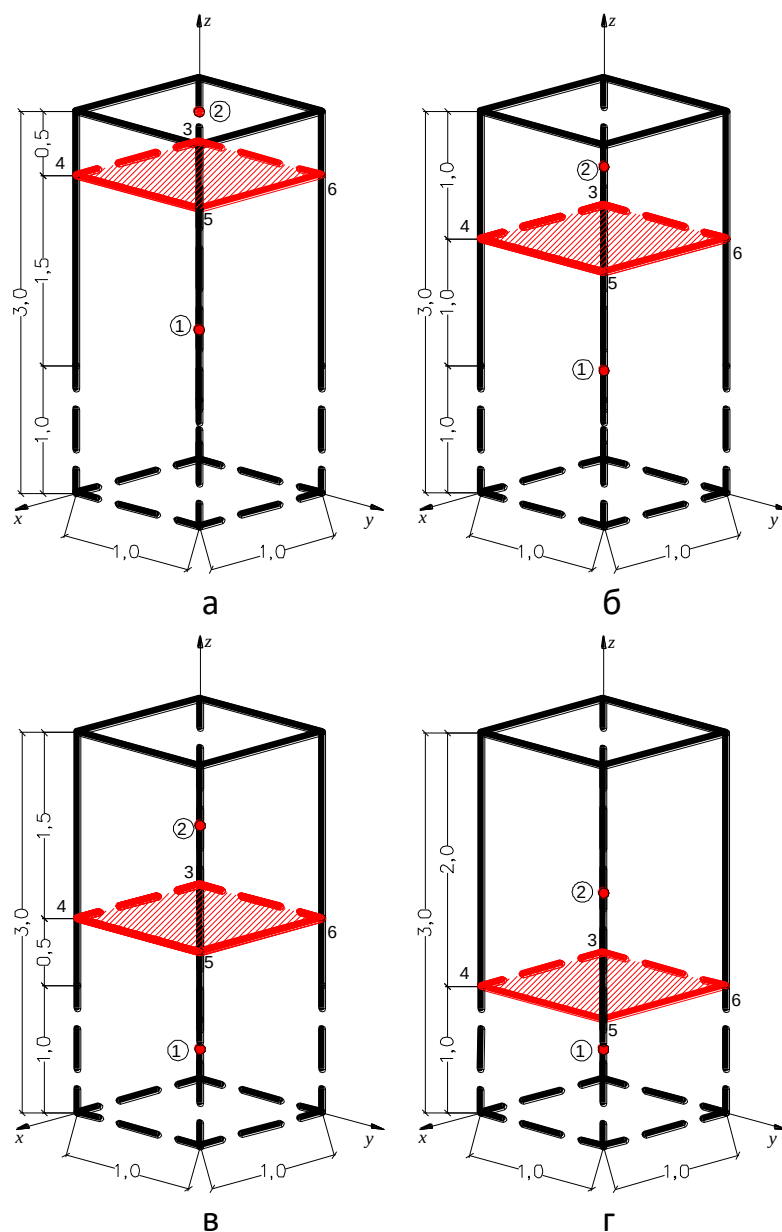


Рис. 3. Варианты разбиения контрфорса на АЖКЭ

Некоторые другие результаты решенных нами задач приведены в таблице 1 и таблице 2.

Таблица 1. Скорость диссипации внутренней энергии

| Вариант разбиения контрфорса | Диссипация внутренней энергии в ОПР разрушения |               |               |               |
|------------------------------|------------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|
|                              | 3                                              | 4             | 5             | 6             |
| а                            | 9.5726                                         | 9.5726        | 29.0667       | 29.0667       |
| б                            | 1.2764                                         | 1.2764        | 3.8758        | 3.8758        |
| в                            | 1.1074                                         | 1.1074        | 3.3624        | 3.3624        |
| г                            | <b>0.6592</b>                                  | <b>0.6592</b> | <b>2.0016</b> | <b>2.0016</b> |

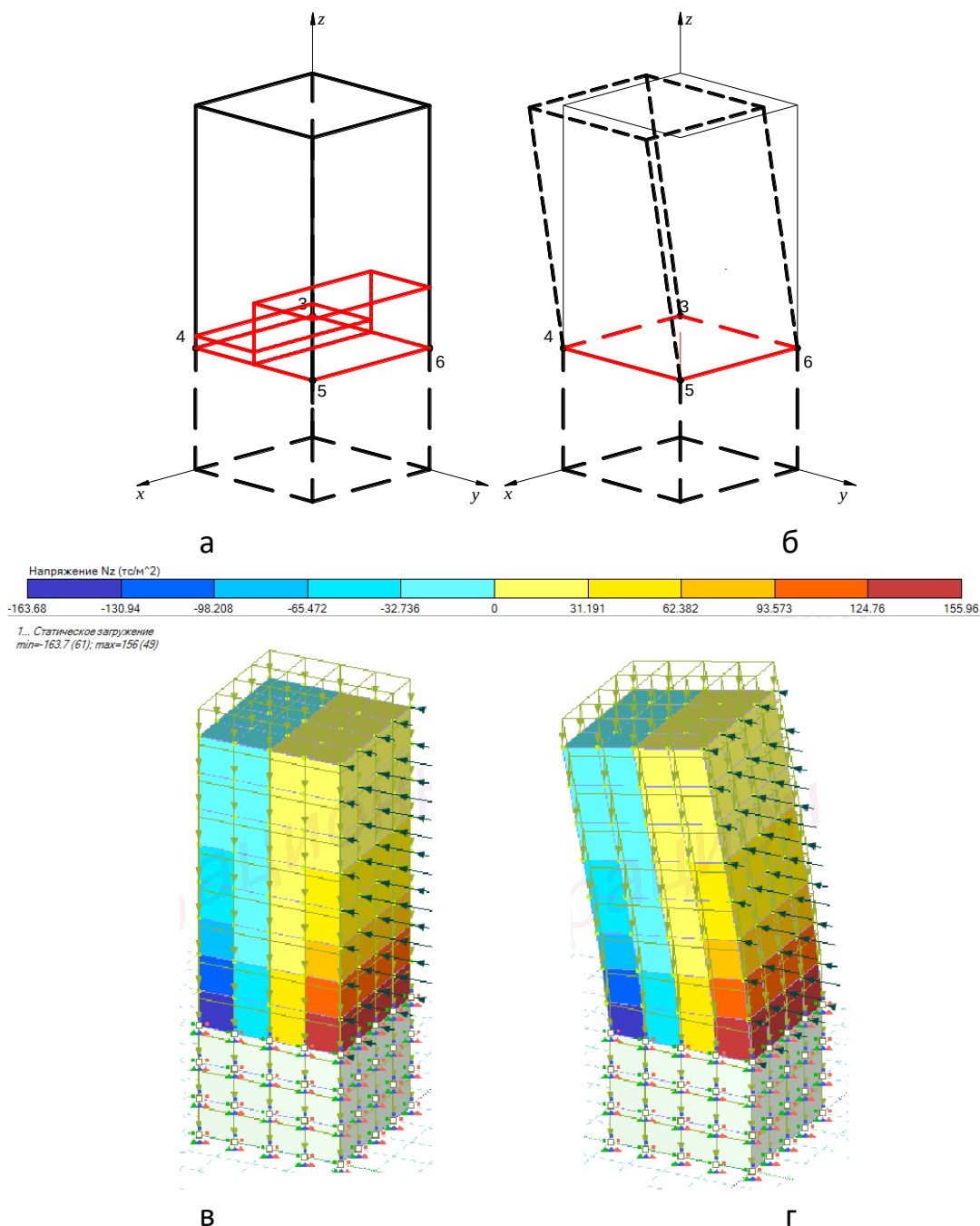


Рис. 4. Результат расчета контрфорса по предлагаемый методике и ПК Лири 10

На рис. 4в и 4г приведено решение аналогичной задачи с использованием ПК Лири 10.11 (для значений  $q=20$  тс/м<sup>2</sup>,  $P_y = 1.2$  тс/м<sup>2</sup>). Здесь полученные напряжения и схема деформирования соответствуют результатам, полученным нами с использованием теории предельного равновесия (более тёмные зоны соответствуют бóльшим напряжениям). Тёмно-синие зоны – сжаты, красные зоны – растянуты.

Таблица 2. Результаты расчетов контрфорса по теории предельного равновесия

| Вариант разбиения контрфорса | $\mu^+$        | Номер АЖКЭ | Скорости обобщенных перемещений |                |               |                |            |            |
|------------------------------|----------------|------------|---------------------------------|----------------|---------------|----------------|------------|------------|
|                              |                |            | $v_x$                           | $v_y$          | $v_z$         | $\omega_x$     | $\omega_y$ | $\omega_z$ |
| а                            | <b>19.3196</b> | ①          | 0                               | 0              | 0             | 0              | 0          | 0          |
|                              |                | ②          | 0                               | <b>-4.3015</b> | <b>6.6239</b> | <b>14.5672</b> | 0          | 0          |
| б                            | <b>2.5761</b>  | ①          | 0                               | 0              | 0             | 0              | 0          | 0          |
|                              |                | ②          | 0                               | <b>-2.0304</b> | <b>0.8832</b> | <b>1.9424</b>  | 0          | 0          |
| в                            | <b>2.2349</b>  | ①          | 0                               | 0              | 0             | 0              | 0          | 0          |
|                              |                | ②          | 0                               | <b>-1.3402</b> | <b>0.7663</b> | <b>1.6851</b>  | 0          | 0          |
| г                            | <b>1.3304</b>  | ①          | 0                               | 0              | 0             | 0              | 0          | 0          |
|                              |                | ②          | <b>0</b>                        | <b>-1.0486</b> | <b>0.4561</b> | <b>1.0032</b>  | <b>0</b>   | <b>0</b>   |

Таким образом, опасная зона контрфорса определяется одинаково в обоих случаях (при расчете с использованием ПК Лира и по предлагаемой нами методике). Максимальное напряжение, полученное с использованием ПК Лира 10.11. - 163,68 тс/м<sup>2</sup> (**1.605 МПа**), а по теории предельного равновесия 2.0016 МПа. Как известно [2], кинематический метод дает верхнюю оценку предельной нагрузки, а расчет по допускаемым напряжениям - нижнюю.

#### Список использованных источников

1. Сибгатуллин Э.С., Сибгатуллин К.Э., Новоселов О.Г. Предельное состояние объемных конечных элементов при трехосных напряженных состояниях - Научно-технический вестник Поволжья, №3, 2015. С.54-58.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности - М.: Наука, 1969. – 420 с.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики - М.: Наука, 1972. - 468 с.
4. Гениев Г.А. Прочность легких и ячеистых бетонов при сложных напряженных состояниях / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Н.И. Левин, Г.А. Никонова. – М.: Стройиздат, 1978. - 166 с.

---

*Novoselov O.G. senior lecturer, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.*



*Sibgatullin K. E. candidate of technical Sciences, assistant professor, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.*

*Sibgatullin E.S. doctor of physical and mathematical Sciences, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.*

#### DETERMINATION OF THE LIMIT BEARING CAPACITY OF THE BUTTERFOR BY STRENGTH

*Abstract: A buttress with dimensions 1.0x1.0x3.0 m is considered, being in a volumetric stress-strain state (SSS). The material of the buttress is concrete of class B25 with standard compressive strength  $R_s = 14.5$  MPa and standard tensile strength  $R_{st} = 1.05$  MPa. The aim of the work is to compare the results of solving the problem according to our proposed methodology and using the software product PC Lira 10.11.*

*Key words: buttress, stress-strain state, PK Lear 10.11, the theory of limiting equilibrium.*

УДК 621.43.004

*Луцко В.А., кандидат технических наук, главный специалист, научно-технический центр ПАО КАМАЗ, e-mail: [lushcheko@kamaz.ru](mailto:lushcheko@kamaz.ru)*

*Павленко А.П., кандидат технических наук, доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», e-mail: [pavlenko\\_aleksey@mail.ru](mailto:pavlenko_aleksey@mail.ru)*

*Румянцев В.В., кандидат технических наук, доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», e-mail: [vvr1954@mail.ru](mailto:vvr1954@mail.ru)*

#### РЕГУЛИРУЕМЫЙ СОПЛОВОЙ АППАРАТ ТУРБИНЫ ТКР: ПРОЕКТИРОВАНИЕ, CFD – АНАЛИЗ.

*Аннотация. Приведены основы и результаты расчета геометрических параметров лопаточного регулируемого соплового аппарата (РСА) и корпуса (улитки) турбины турбокомпрессора. Предложены три варианта профилей лопаток. CFD – анализ турбинной ступени ТКР выполнен с применением пакета AVL FIRE. Сравнение лопаточных аппаратов с различными профилями проводилось по значению потерь давления в них.*